Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a und die Funktion g jeweils in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich D_{fa} bzw. D_g durch:

f_a: $y = f_a(x) = \frac{2x-4}{x+a}$; $x \in D_{fa}$, $a \in R$, $a \neq -2$;

g: $y = g(x) = 2x - 8\ln(x+2)$; $x \in D_g$.

Ferner ist der Graph G der Funktion g in einem Intervall gegeben (siehe Abbildung auf der folgenden Seite).

a) Geben Sie die Definitionsbereiche D_{fa} und D_g an.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f_a mit den Koordinatenachsen sowie Gleichungen der Asymptoten der Graphen von f_a.

Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen f_a auf Existenz lokaler Extrempunkte.

Zeigen Sie, dass die Funktionen f_a für $a > -2$ in den Intervallen $-\infty < x < -a$ und $-a < x < \infty$ jeweils monoton steigend sind.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-8 \leq x \leq 8$ in das gegebene Koordinatensystem.

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f_2 für $x > -2$ die Funktion g als Stammfunktion hat und beschreiben Sie an zwei Eigenschaften dieser Funktionen bzw. ihrer Graphen, wie sich dieser Zusammenhang zeigt.

Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die vom Graphen der Funktion f_2 und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

Die Graphen der Funktionen f_2 und g haben an genau einer Stelle den gleichen Anstieg. Berechnen Sie diese Stelle.

c) Gesucht ist eine Gleichung für Stammfunktionen der Funktionen f_a unter der Bedingung $x > -a$.
Ermitteln Sie eine begründete Vermutung für eine solche Gleichung.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem seien durch die Punkte A(1 | 1 | 2), B(3 | –5 | 0), C(9 | –3 | 1) und D(7 | 3 | 1) die Geraden AB, AC und AD gegeben.

a) Begründen Sie, dass die Geraden AB und AD eine Ebene E bestimmen und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

Ermitteln Sie eine Parametergleichung der Geraden, die beim Schnitt der Ebene E mit der x-y-Ebene entsteht.

b) Zeigen Sie, dass $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$ und schlussfolgern Sie daraus die gegenseitige Lage der Geraden AB, AC und AD.

Die Punkte A, B, C und D werden mittels senkrechter Parallelprojektion in die x-y-Ebene projiziert. Ihre Bilder $A_1(1 \mid 1)$, $B_1(3 \mid -5)$, $C_1(9 \mid -3)$ und $D_1(7 \mid 3)$ werden unter Beibehaltung der x-Achse und der y-Achse nun in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene betrachtet.

c) Weisen Sie nach, dass die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 Eckpunkte eines Quadrates sind, ermitteln Sie eine Gleichung des Umkreises k des Quadrates und eine Gleichung der Tangente an diesen Umkreis im Punkt B_1.

Ermitteln Sie eine Gleichung des Kreises k_1, der konzentrisch zum Kreis k liegt und die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R$, als Tangente besitzt.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Für einen Einstellungstest sind Aufgaben erarbeitet worden.
Eine solche Aufgabe besteht aus den drei voneinander unabhängigen Fragen A, B und C.
Man schätzt ein, dass

die Frage A mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$,

die Frage B mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ und

die Frage C mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$

richtig beantwortet wird.
Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der richtig beantworteten Fragen, ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in der Tabelle unvollständig dargestellt.

X = k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{2}{24}$	$\frac{9}{24}$		

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X für X = 2 und X = 3.

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie diesen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis M.
M: „Mindestens zwei Fragen werden richtig beantwortet."

Ein Einstellungstest besteht aus 50 Aufgaben. Man geht davon aus, dass jede Aufgabe mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 richtig beantwortet wird und dass die Beantwortung der Aufgaben unabhängig voneinander erfolgt. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der richtig beantworteten Aufgaben.

b) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße Y als binomialverteilt angenommen werden kann, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens 35 Aufgaben richtig beantwortet werden.

Berechnen Sie einen Näherungswert für diese Wahrscheinlichkeit mittels Approximation der Binomialverteilung durch Standardnormalverteilung und geben Sie den relativen Fehler für diesen Näherungswert in Prozent an.

c) Ein Großunternehmen möchte den Einstellungstest zur Auswahl von Bewerbern verwenden. Der Einstellungstest wird als geeignet eingeschätzt, wenn ihn 50 % der Bewerber bestehen.
Um die Eignung des Einstellungstests zu untersuchen, werden 100 Probanden diesem Einstellungstest unterzogen.
Konstruieren Sie einen zweiseitigen Signifikanztest auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ und geben Sie eine zugehörige Entscheidungsregel an.
Formulieren Sie für diesen Signifikanztest die Fehler 1. Art und 2. Art.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.1
Analysis

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Graph G der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $(x \in R)$ sowie der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(0 | 2) und dem Radius mit der Maßzahl 2 gegeben.

Der Graph G und der Kreis k schneiden einander im Punkt $S(x_s \mid y_s)$, $x_s > 0$.
Berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Tangenten an den Graphen G und den Kreis k in diesem Schnittpunkt.

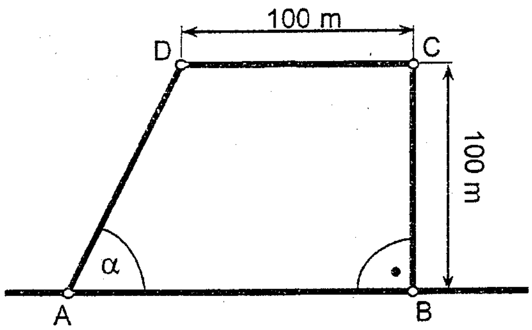
Der Graph G und der Kreis k begrenzen im I. Quadranten eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.2
Analytische Geometrie

Von einem ebenen Gebiet soll ein Lageplan erstellt werden. Diesem Lageplan liege ein kartesisches Koordinatensystem zu Grunde. Eine Einheit auf den Achsen entspricht 10 m und die positive Orientierung der y-Achse gibt die Richtung nach Norden an.
Der Verlauf eines geradlinigen Weges sei im Lageplan durch die Punkte A(–3 | –4) und B(6 | 8) beschrieben.

An diesen Weg grenzt ein trapezförmiges Grundstück, dessen Form in der Abbildung dargestellt ist.
Im Punkt C, der nordwestlich vom Punkt B liegt, soll ein Mast einer in Nord-Süd-Richtung verlaufenden Hochspannungsleitung errichtet werden.



Zeichnen Sie den Lageplan, der alle genannten Objekte enthält.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden AB.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels α sowie die Koordinaten der Punkte C und D in dem Lageplan.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, über der die Hochspannungsleitung im Grundstück verläuft.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	11	Angeben der Definitionsbereiche, Ermitteln der Schnittpunkte und Gleichungen der Asymptoten, Untersuchen auf lokale Extrempunkte, z. B.: D_{f_a}: $x \in R$ und $x \neq -a$ D_g: $x \in R$ und $x > -2$ $S_x(2 \mid 0)$; $S_y(0 \mid -\frac{4}{a})$; Polasymptote: $x = -a$; Asymptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ $f_a'(x) = \frac{2a+4}{(x+a)^2} \neq 0 \Rightarrow$ keine lokalen Extrempunkte
	4	Zeigen der Monotonie, z. B.: $f_a'(x) = \frac{2a+4}{(x+a)^2} > 0$, denn der Zähler 2a + 4 ist für a > –2 stets positiv und der Nenner $(x + a)^2$ ist stets positiv. $\Rightarrow f_a$ ist für a > –2 jeweils in den gegebenen Intervallen monoton steigend
	4	Zeichnen des Graphen
b)	5	Nachweisen der Stammfunktion und Beschreiben, z. B.: $g'(x) = f_2(x)$ Da g Stammfunktion von f_2 ist, ist f_2 die Ableitungsfunktion von g. f_2 beschreibt also geometrisch die Anstiege des Graphen von g. Der Graph von f_2 hat z. B. bei 2 eine Nullstelle, d. h. der Anstieg des Graphen von g ist an dieser Stelle 0 (erkennbar im Tiefpunkt). Analog kann man aus den Funktionswerten von f_2 an allen weiteren Stellen das Monotonieverhalten von f beschreiben; z. B. für x < 2 ist $g_2(x)$ negativ; folglich ist die Funktion f in diesem Bereich monoton fallend.
	3	Berechnen des Inhalts der Fläche, z. B.: $A = \left\lvert \int_0^2 \frac{2x-4}{x+2}\,dx \right\rvert = \left\lvert [2x - 8\ln(x+2)]_0^2 \right\rvert = \lvert 4 - 8\ln 2 \rvert \approx 1{,}55$
	5	Berechnen der Stelle, z. B.: $f_2'(x) = g'(x) \Leftrightarrow \frac{8}{(x+2)^2} = 2 - \frac{8}{x+2} \Leftrightarrow x^2 = 8$ Da x > –2, ist die gesuchte Stelle $x = \sqrt{8} \approx 2{,}83$
c)	3	Ermitteln einer begründeten Vermutung, z. B.: Die Funktion g kann als „Vorbild" dienen: Das Argument der ln-Funktion ist vermutlich x + a. Der Faktor vor ln muss so gewählt werden, dass sich beim Ableiten der Zähler 2x – 4 ergibt. $y = h_a(x) = 2x - (2a + 4)\cdot\ln(x+a)$
	35	

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	5	Begründen, dass die Geraden eine Ebene bestimmen und Ermitteln einer Koordinatengleichung, z. B.: für alle $r \in R$ gilt $\overrightarrow{AB} \neq r\,\overrightarrow{AD} \Rightarrow$ Die Punkte A, B und D liegen nicht auf ein und derselben Geraden und bestimmen somit eine Ebene. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix} \wedge A \in E \quad \Rightarrow \quad E:\ x - y + 4z - 8 = 0$
	3	Ermitteln einer Parametergleichung, z. B.: $\left.\begin{matrix} \text{I} & x - y + 2z - 8 = 0 \\ \text{II} & z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y + 8 \Rightarrow S_x(8 \mid 0 \mid 0)$ $B \in g \wedge S_x \in g \Rightarrow g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in R$
b)	4	Zeigen, dass $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$ und Schlussfolgern, z. B.: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 80 \neq 0$ Wegen $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{AC} \rvert \cdot \cos\angle((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}); \overrightarrow{AC}) \neq 0$ folgt $\angle((\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}); \overrightarrow{AC}) \neq 90°$, d. h. die Geraden AB, AC und AD liegen nicht in ein und derselben Ebene.
c)	9	Nachweisen des Quadrates, Ermitteln einer Kreisgleichung und einer Tangentengleichung z. B.: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} \wedge \lvert \overrightarrow{A_1D_1} \rvert = \lvert \overrightarrow{A_1B_1} \rvert \wedge \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{A_1D_1} = 0$ $\Rightarrow$ Die Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 sind Eckpunkte eines Quadrates. $M_k = M_{\overline{A_1C_1}} \wedge r^2 = \frac{1}{4} \lvert \overrightarrow{A_1C_1} \rvert^2 \Rightarrow k:\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = 20$ $t:\ x + 2y + 7 = 0$
	4	Ermitteln einer Gleichung des Kreises k_1, z. B.: $g:\ x - y - 8 = 0, \quad r_{k1} = d(M_k; g) = \left\lvert \frac{1}{\sqrt{2}} (5 + 1 - 8) \right\rvert = \sqrt{2}$ $k_1:\ (x-5)^2 + (y+1)^2 = 2$
	25	

Pflichtaufgaben

Aufgabe 3
Stochastik

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	3	Berechnen der Wahrscheinlichkeiten, z. B.: $P(X=2)=\frac{10}{24}$; $P(X=3)=\frac{3}{24}$
	3	Berechnen von Erwartungswert und Interpretation sowie Berechnen der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis M, z. B.: $E(X)=\frac{19}{12}\approx 1{,}58$ Im statistischen Mittel werden 1,58 Fragen richtig beantwortet; das heißt von z. B. 300 Fragen werden 158 Fragen richtig beantwortet. $P(M)=P(X\geq 2)=\frac{13}{24}\approx 0{,}54$
b)	4	Begründen der Binomialverteilung und Berechnen der Wahrscheinlichkeit, z. B.: Begründung; $Y \sim B_{50;\,0,6}$ $P(Y\geq 35)=1-P(Y\leq 34)=0{,}0955$
	6	Berechnen eines Näherungswertes sowie des relativen Fehlers, z. B.: $\mu=30$; $\sigma=\sqrt{12}$ $P(Y\geq 35)\approx 1-\Phi\left(\frac{34-30+0{,}5}{\sqrt{12}}\right)\approx 1-\Phi(1{,}3)=0{,}0968$ $\delta=\frac{0{,}0968-0{,}0955}{0{,}0955}\cdot 100\%\approx 1{,}4\,\%$
c)	9	Konstruieren des Signifikanztestes, Angeben einer Entscheidungsregel und Formulieren der Fehler, z. B.: Z: Anzahl der Probanden, die den Einstellungstest bestanden haben H_0: $p=0{,}5$; $Z\sim B_{100;\,0,5}$ (bei wahrer H_0); $\frac{\alpha}{2}=0{,}025$ $P(Z\leq k_L)\leq 0{,}025 \Rightarrow k_L=39$ $P(Z\geq k_R)\leq 0{,}025 \Leftrightarrow P(Z\leq k_R-1)\geq 0{,}975 \Rightarrow k_R-1=60$ $\overline{A}=\{0;\,1;\,...;\,39\}\cup\{61;\,62;\,...;\,100\}$ Wenn die Anzahl der Probanden, die den Einstellungstest bestanden haben, im Ablehnungsbereich liegt, dann wird der Einstellungstest nicht als geeignet eingeschätzt. Fehler 1. Art: Der Einstellungstest ist geeignet, wird aber als ungeeignet eingeschätzt. Fehler 2. Art: Der Einstellungstest ist ungeeignet, wird aber als geeignet eingeschätzt.
	25	

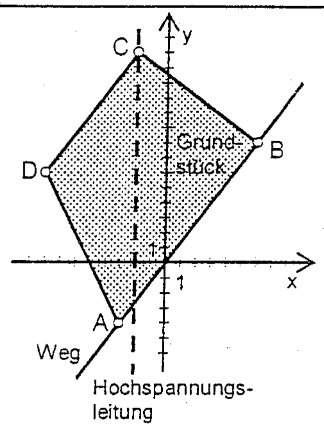
Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.1
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
	10	Berechnen des Gradmaßes, z. B.: $k: \ x^2 + (y-2)^2 = 4$; Schnittpunkte von G und k : $P_{1;2}(\pm 2 \mid 2)$ $S = P_2(2 \mid 2)$ Gleichung der Tangente t an k in S: $x = 2$ Anstieg von G in S: $m = f'(2) = \tan\beta = 2$ $\alpha = 90° - \beta \approx 26{,}6°$
	5	Berechnen der Maßzahl des Inhalts, z. B.: $A = A_1 - A_2$ $A_2 = 4 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2$, $A_1 = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{4}{3}$ $A = \frac{3\pi - 8}{3} \approx 0{,}475$
	15	

Wahlpflichtaufgaben

Aufgabe 4.2
Analytische Geometrie

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
	3	Zeichnen des Lageplanes, z. B.: 
	2	Ermitteln einer Gleichung, z. B.: AB: $y = \frac{4}{3}x$
	8	Berechnen des Gradmaßes des Winkels α sowie der Koordinaten der Eckpunkte C und D, z. B.: $\tan\alpha = \frac{10}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert - 10} = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 10 \cdot \frac{1}{\lvert\overrightarrow{n_{AB}}\rvert}\overrightarrow{n_{AB}} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \Rightarrow C(-2 \mid 14)$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 10 \cdot \frac{1}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert}\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-2\\14\end{pmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix} \Rightarrow D(-8 \mid 6)$
	2	Berechnen der Streckenlänge, z. B.: $y_C - y_S = 14 - \frac{4}{3}(-2) = \frac{50}{3}$, Länge der Strecke: ≈ 167 m
	15	